第 6 講　統計的な推測

PART1　母平均の推定

1　ある市立図書館における高校生の利用状況について調査を行った。

この図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1 回あたりの利用時間(分)を表す確率変数を W とし, W は母平均 m, 母標準偏差 30 の分布に従うとする。

この母集団から大きさ n の標本 W_1, W_2, ……, W_n を無作為に抽出する。

利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1 = W_1 - 60,\ U_2 = W_2 - 60,\ \cdots\cdots,\ U_n = W_n - 60$$

とおく。

(1)　U_1 の平均 $E(U_1)$, 標準偏差 $\sigma(U_1)$ を求めよ。

(2)　この母集団から無作為に抽出された 100 人の生徒に対して, U_1, U_2, ……, U_{100} の値を調べたところ, その標本平均の値が 50 分であった。$t = m - 60$ として, t に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

Point Pickup

母平均が m, 母標準偏差が σ である母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について, n が十分に大きいとき, $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

※ n が十分に大きいときは, 母標準偏差 σ の代わりに標本標準偏差 S を用いてもよい。

※母平均 m に対して信頼度 95% の信頼区間を求めることを, 母平均 m を信頼度 95% で推定する, ということがある。

第 6 講　PART1　確認問題

ある農場ではトマトを生産している。
この農場で今年生産されたトマト全体を母集団とする。トマト1個の重さ(g)を表す確率変数を W とし，W は母平均 m，母標準偏差32の分布に従うとする。この母集団から大きさ n の標本 W_1，W_2，……，W_n を無作為に抽出する。
重さが180gからどの程度異なるかについて調査するために

$$U_1 = W_1 - 180,\ U_2 = W_2 - 180,\ \cdots\cdots,\ U_n = W_n - 180$$

とおく。

1　U_1 の平均 $E(U_1)$，標準偏差 $\sigma(U_1)$ を求めよ。

$E(U_1) = $ ［ア］　　$\sigma(U_1) = $ ［イウ］

［［ア］の選択肢］

① 180　② m　③ $180m$
④ $m+180$　⑤ $m-180$

2　この母集団から無作為に抽出された400個のトマトに対して，U_1，U_2，……，U_{400} の値を調べたところ，その標本平均の値が100gであった。$t = m - 180$ として，t に対する信頼度95%の信頼区間を求めよ。ただし，小数第2位を四捨五入して小数第1位まで求めよ。

［エオ］.［カ］ $\leqq t \leqq$ ［キクケ］.［コ］　単位はg

第 6 講　統計的な推測

PART1　母平均の推定

1 ある市立図書館における高校生の利用状況について調査を行った。
この図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1 回あたりの利用時間(分)を表す確率変数を W とし，W は母平均 m，母標準偏差 30 の分布に従うとする。
この母集団から大きさ n の標本 W_1，W_2，……，W_n を無作為に抽出する。
利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1 = W_1 - 60,\ U_2 = W_2 - 60,\ \cdots\cdots,\ U_n = W_n - 60$$

とおく。

(1)　U_1 の平均 $E(U_1)$，標準偏差 $\sigma(U_1)$ を求めよ。

(2)　この母集団から無作為に抽出された 100 人の生徒に対して，U_1，U_2，……，U_{100} の値を調べたところ，その標本平均の値が 50 分であった。$t = m - 60$ として，t に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

(1)　W_1 は，母集団から無作為に 1 人の生徒を選んだとき，その生徒の 1 回あたりの利用時間(分)である。1 回あたりの利用時間を表す確率変数 W は，母平均 m，母標準偏差 30 の分布に従うから，確率変数 $U_1 = W_1 - 60$ の平均と標準偏差は

平均　$E(U_1) = E(W_1 - 60) = E(W_1) - 60 = m - 60$

標準偏差　$\sigma(U_1) = \sigma(W_1 - 60) = \sigma(W_1) = 30$

(2)　この母集団から無作為に抽出された 100 人の生徒の利用時間 U_1，U_2，……，U_{100} の標本平均を $\overline{U}$ とする。

標本の大きさは十分大きいから，$\overline{U}$ は近似的に正規分布 $N\left(m-60,\ \dfrac{30^2}{100}\right)$ に従う。

よって，$m-60$，すなわち t に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{U} - 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} \leqq t \leqq \overline{U} + 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}$$

$\overline{U} = 50$ とすると

$$50 - 1.96 \cdot 3 \leqq t \leqq 50 + 1.96 \cdot 3$$

$$50 - 5.88 \leqq t \leqq 50 + 5.88$$

よって　$44.12 \leqq t \leqq 55.88$

第 6 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イウ：32

[解説]

W_1 は，母集団から無作為に 1 個のトマトを選んだとき，そのトマトの重さである。トマト 1 個の重さを表す確率変数 W は，母平均 m，母標準偏差 32 の分布に従うから，確率変数 $U_1 = W_1 - 180$ の平均と標準偏差は

平均　$E(U_1) = E(W_1 - 180) = E(W_1) - 180$

$= \boldsymbol{m - 180}$ [A]

標準偏差　$\sigma(U_1) = \sigma(W_1 - 180) = \sigma(W_1)$

$= \mathbf{32}$

> [A]　確率変数 X と定数 a, b について，$Y = aX + b$ とすると
> 期待値　$E(Y) = E(aX + b)$
> $= aE(X) + b$
> 分散　$V(Y) = V(aX + b) = a^2 V(X)$
> 標準偏差
> $\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

2

[正解] エオ：96，カ：9，キクケ：103，コ：1

[解説]

この母集団から無作為に抽出された 400 個のトマトについて調べた値，U_1，U_2，……，U_{400} の標本平均を $\overline{U}$ とする。

標本の大きさは十分大きいから，$\overline{U}$ は近似的に正規分布 $N\left(m - 180, \dfrac{32^2}{400}\right)$ に従う。[B]

よって，$m - 180$ すなわち t に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{U} - 1.96 \cdot \frac{32}{\sqrt{400}} \leqq t \leqq \overline{U} + 1.96 \cdot \frac{32}{\sqrt{400}}$$ [C]

$\overline{U} = 100$ とすると

$100 - 1.96 \cdot 1.6 \leqq t \leqq 100 + 1.96 \cdot 1.6$

$100 - 3.136 \leqq t \leqq 100 + 3.136$

$96.864 \leqq t \leqq 103.136$

よって　$\mathbf{96.9 \leqq \boldsymbol{t} \leqq 103.1}$　単位は g

> [B]　母平均が m，母標準偏差が σ である母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について，n が十分に大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

> [C]　標本平均が $\overline{X}$ のとき，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間は
> $\overline{X} - 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$